QCM :

① Faux. f est bornée $\Longrightarrow$ elle admet un majorant et un minorant. Contre-exemple : $x \longmapsto \dfrac{x^2}{x^2+1}$.

② Faux. Par exemple, $2 \in [-1,+\infty[$ mais $-2 \notin [-1,+\infty[$.

③ Vrai. $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = (-1)\times 0 + (-1)\times 3 = -3$.

④ Faux. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens.

Exercice 1 :

① $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}\setminus\{-3\}$.

② a) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 2x - 1 = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$

avec : $\begin{cases} a &= \dfrac{1}{2} \\ b &= 2 \\ c &= -1 \end{cases}$ et $\Delta = b^2 - 4ac = 4 + 2 = 6$

$\Longrightarrow f(x) = \dfrac{1}{2}(x+2)^2 - 3$

b) ▶ Sur $]-\infty, -2]$, soient a et b deux réels tels que $a \leqslant b \leqslant -2$

$\Longrightarrow a + 2 \leqslant b + 2 \leqslant 0 \Longrightarrow (a+2)^2 \geqslant (b+2)^2 \Longrightarrow \dfrac{1}{2}(a+2)^2 - 3 \geqslant \dfrac{1}{2}(b+2)^2 - 3$

$\Longrightarrow f(a) \geqslant f(b)$ donc f est décroissante sur $]-\infty, -2]$.

▶ Sur $[-2, +\infty[$, soient a et b deux réels tels que $-2 \leqslant a \leqslant b$

$\Longrightarrow 0 \leqslant a + 2 \leqslant b + 2 \Longrightarrow (a+2)^2 \leqslant (b+2)^2 \Longrightarrow \dfrac{1}{2}(a+2)^2 - 3 \leqslant \dfrac{1}{2}(b+2)^2 - 3$

$\Longrightarrow f(a) \leqslant f(b)$ donc f est croissante sur $[2, +\infty[$.

c) $\mathscr{C}_f$ est une parabole de sommet $S(-2,-3)$, d'axe la droite d'équation $x = -2$ et dirigée vers le haut.

d) *(voir figure)*

③ a) $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}\setminus\{-3\}$. On a $3 \in \mathcal{D}_g$ mais $-3 \notin \mathcal{D}_g$ donc g est ni paire ni impaire.

b) Les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1 = \frac{-3}{x+3} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1\right)(x+3) = -3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - x + \frac{3}{2}x^2 + 6x \cancel{-3} = \cancel{-3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^3 + \frac{7}{2}x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x\left(x^2 + 7x + 10\right) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 0} \text{ ou } x^2 + 7x + 10 = 0$$

$$\Delta = 7^2 - 4 \times 10 = 9 \Longrightarrow x' = \frac{-7-3}{2} = \boxed{-5} \text{ et } x'' = \frac{-7+3}{2} = \boxed{-2}$$

donc $A\left(-5, g(-5)\right)$, $B\left(-2, g(-2)\right)$ et $C\left(0, g(0)\right)$.

c'est à dire $A\left(-5, \frac{3}{2}\right)$, $B(-2, -3)$ et $C(0, -1)$ sont les points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

c) L'expression $g(x) = \frac{-3}{x+3}$ est de la forme $\frac{ax+b}{cx+d}$ donc $\mathscr{C}_g$ est une hyperbole de centre $I(-3,0)$ et d'asymptotes les droites d'équations $x = -3$ et $y = 0$.

d) *(voir figure)*

④ a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $h(-x) = \frac{-3}{|-x|+3} = \frac{-3}{|x|+3} = h(x)$

donc h est paire.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| + 3 > 0$ et $-3 < 0$ donc $\frac{-3}{|x|+3} < 0$ donc $h(x) < 0$

c'est à dire h est majorée par 0.

D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| \geqslant 0 \Longrightarrow |x| + 3 \geqslant 3$

$$\Longrightarrow \frac{1}{|x|+3} \leqslant \frac{1}{3} \Longrightarrow \frac{-3}{|x|+3} \geqslant -1$$

c'est à dire h est minorée par -1.

c) ▶ Sur $]-\infty, 0]$, soient a et b deux réels tels que $a \leqslant b \leqslant 0$

$$\Longrightarrow |a| \geqslant |b| \Longrightarrow |a| + 3 \geqslant |b| + 3 \Longrightarrow \frac{1}{|a|+3} \leqslant \frac{1}{|b|+3} \Longrightarrow \frac{-3}{|a|+3} \geqslant \frac{-3}{|b|+3}$$

$\Longrightarrow h(a) \geqslant h(b)$ et par suite h est décroissante sur $]-\infty, 0]$

▶ Sur $[0, +\infty[$, soient a et b deux réels tels que $0 \leqslant a \leqslant b$

$$\Longrightarrow |a| \leqslant |b| \Longrightarrow |a| + 3 \leqslant |b| + 3 \Longrightarrow \frac{1}{|a|+3} \geqslant \frac{1}{|b|+3} \Longrightarrow \frac{-3}{|a|+3} \leqslant \frac{-3}{|b|+3}$$

$\Longrightarrow h(a) \leqslant h(b)$ et par suite h est croissante sur $[0, +\infty[$

d) Pour tout $x \in [0,+\infty[$, $|x| = x \Longrightarrow h(x) = \dfrac{-3}{|x|+3} = \dfrac{-3}{x+3} = g(x)$

e) Pour tout $x \geqslant 0$, $h(x) = g(x)$ donc $\mathscr{C}_h$ est confondue avec $\mathscr{C}_g$ sur $[0,+\infty[$.

De plus h est paire donc $\mathscr{C}_h$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

D'où la construction de h sur $]-\infty,0]$ s'obtient par symétrie de celle de $\mathscr{C}_g$ par rapport à $(O,\vec{j})$.

(*voir figure*)

⑤ a) $\dfrac{-3}{x+3} \geqslant 0 \Longleftrightarrow g(x) \geqslant 0$.

Les solutions de cette inéquation sont les abscisses des point de $\mathscr{C}_g$ d'ordonnée positive.

Graphiquement : $S_{\mathbb{R}} =]-\infty,-3[$

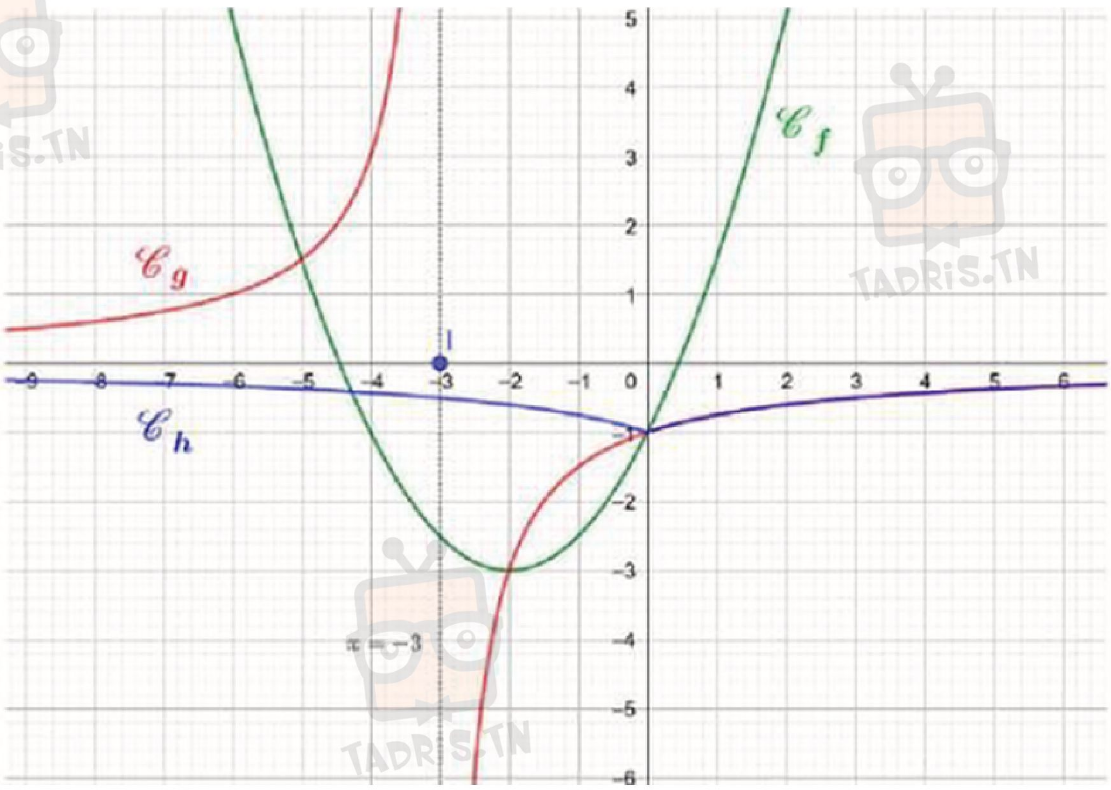
b) $\dfrac{-3}{x+3} \geqslant \dfrac{1}{2}x^2+2x-1 \Longleftrightarrow g(x) \geqslant f(x)$

Les solutions de cette inéquation sont les abscisses des points de $\mathscr{C}_g$ qui sont au dessus de ceux de $\mathscr{C}_f$.

Graphiquement : $S_{\mathbb{R}} = [-5;-3[\cup[-2;0]$

c) $h(x) > \dfrac{-1}{2}$

Les solutions de cette inéquation sont les abscisses des points de $\mathscr{C}_h$ qui sont au dessus de la droite



Exercice 2

1) a) Le projeté orthogonal de E sur (DA) est A. Donc :

$$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DA}=DA^2=\left(\sqrt{3}\right)^2=3$$

b) On a : $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DE}=DA\cdot DE\cdot\cos\widehat{ADE}$

$$\Longrightarrow DE=\frac{\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DE}}{DA\cdot\cos\widehat{ADE}}=\frac{3}{\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{\cancel{3}}{\cancel{\sqrt{3}}\cdot\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{2}}=2$$

Pythagore : $DA^2+AE^2=DE^2$

$$\Longrightarrow AE^2=DE^2-DA^2=4-3=1\Longrightarrow AE=1$$

2) a) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires de même sens.

Donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=AB\cdot AE=\sqrt{3}\cdot 1=\sqrt{3}$

Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont colinéaires de sens contraires.

Donc $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AG}=-AD\cdot AG=-\sqrt{3}\cdot 1=-\sqrt{3}$

b) $$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BG}=\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AG}\right)$$
$$=\underbrace{\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BA}}_{0}-\underbrace{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AG}}_{-\sqrt{3}}-\underbrace{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}}_{\sqrt{3}}+\underbrace{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AG}}_{0}=0$$

D'où (DE) et (BG) sont perpendiculaires

3) a) $$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DB}=\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}\right)\cdot\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\right)$$
$$=DA^2+\underbrace{\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AB}}_{0}+\underbrace{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DA}}_{0}+\underbrace{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}}_{\sqrt{3}}=3+\sqrt{3}$$

b) $$\frac{3+\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{6}}=\frac{\cancel{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}+1\right)}{2\cdot\cancel{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

c) On a : $\widehat{BDE}=\widehat{BDA}-\widehat{EDA}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}$

Donc $\cos\frac{\pi}{12}=\cos\widehat{BDE}=\dfrac{\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DB}}{DE\cdot DB}$

Pythagore : $DB^2=DA^2+AB^2=6\Longrightarrow DB=\sqrt{6}$

$$\Longrightarrow\cos\frac{\pi}{12}=\frac{3+\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

4) a) $MA^2+MC^2=\left\|\overrightarrow{MA}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{MC}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right\|^2$

$=MI^2+IA^2+2\,\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA}+MI^2+IC^2+2\,\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IC}$

$=2MI^2+2IA^2+2\overrightarrow{MI}\underbrace{\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}\right)}_{\vec{0}}$

Calcul de IA : $IA=ID=\dfrac{BD}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\Longrightarrow IA^2=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$

d'où $MA^2+MC^2=2MI^2+\cancel{2}\cdot\dfrac{3}{\cancel{2}}=2MI^2+3$

b) $MA^2+MC^2=7\Longleftrightarrow 2MI^2+3=7\Longleftrightarrow MI^2=2\Longleftrightarrow MI=\sqrt{2}$

d'où $\mathscr{C}$ est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{2}$.

5) a) $A(0;0)$, $G(1;0)$, $E(0;1)$, $B\left(0,\sqrt{3}\right)$

J est le milieu de $[BG]\Longrightarrow\begin{cases}x_J=\dfrac{x_B+x_G}{2}=\dfrac{1}{2}\\[2mm] y_J=\dfrac{y_B+y_G}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

donc $J\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

b)

$\begin{cases}\overrightarrow{AG}=\begin{pmatrix}x_G-x_A\\y_G-y_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\[2mm] \overrightarrow{AJ}=\begin{pmatrix}x_J-x_A\\y_J-y_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2}\\\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\end{cases}\Longrightarrow\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AJ}=1\cdot\dfrac{1}{2}+0\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}$

c) $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AJ}=AG\cdot AJ\cdot\cos\widehat{GAJ}\Longrightarrow\cos\widehat{GAJ}=\dfrac{\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AJ}}{AG\cdot AJ}$

avec $AG=\sqrt{(x_G-x_A)^2+(y_G-y_A)^2}=1$

et $AJ=\sqrt{(x_J-x_A)^2+(y_J-y_A)^2}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}}=1$

donc $\cos\widehat{GAJ}=\dfrac{1}{2}$ et par suite $\widehat{GAJ}=\dfrac{\pi}{3}$